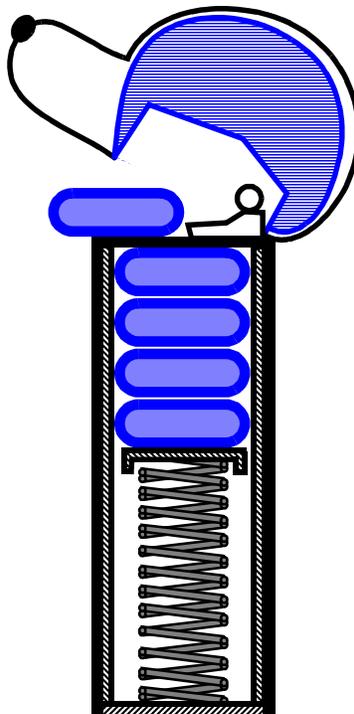


# PILES, FILES ET LISTES CHAÎNÉES

- Types abstraits de données (TAD)
- Piles
- Exemple: Analyse boursière
- Files
- Listes chaînées
- Files à deux bouts (*deques*)

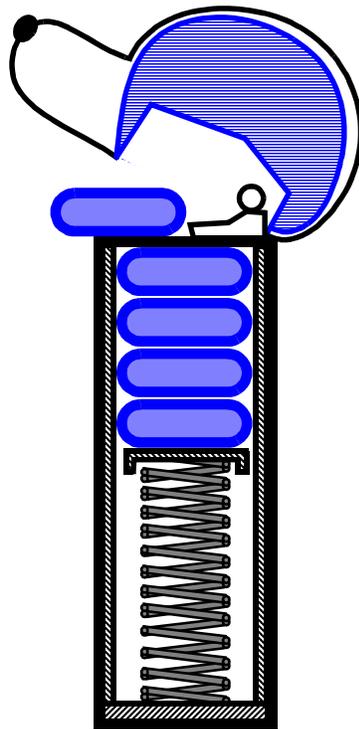


# Types abstraits de données (TAD)

- Un **type abstrait de données** (*Abstract Data Type* —*ADT*) est une abstraction de structure de données: aucun codage n'est impliqué.
- Un **TAD** spécifie:
  - ce qui est contenu dans le TAD
  - les opérations qui peuvent être effectuées sur ou par le TAD.
- Par exemple, si nous cherchons à modéliser un sac de billes avec un TAD, nous pourrions spécifier que:
  - ce TAD contient des billes
  - ce TAD supporte l'insertion d'une bille et le retrait d'une bille.
- Il y a beaucoup de TAD standards et formalisés. Un sac de billes n'est pas l'un d'entre eux.
- Dans ce cours, nous apprendrons différents TAD standards (piles, files, listes...).

# Piles (*Stacks*)

- Une **pile** est un contenant pour des objets insérés et retirés selon le principe **dernier entré, premier sorti** (*last-in-first-out*, ou **LIFO**).
- Les objets peuvent être insérés à tout moment, mais seulement le dernier (le plus récemment inséré) peut être retiré.
- Insérer un item correspond à empiler l'item (*pushing*). Dépiler la pile (*popping*) correspond au retrait d'un item.
- Analogie: distributeur de bonbons PEZ<sup>®</sup>

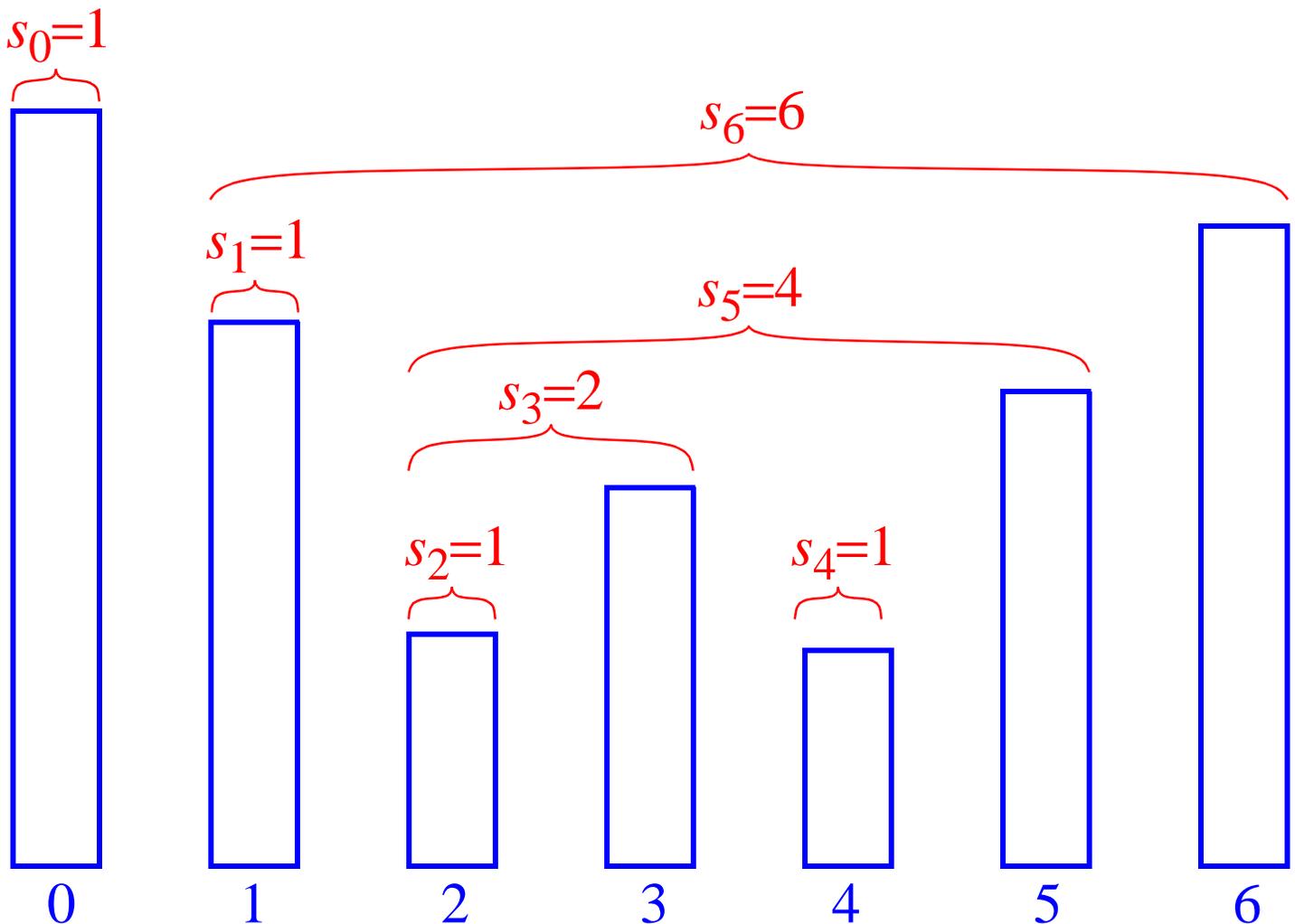


# Le TAD Pile (ou Stack)

- Une pile est un **type abstrait de données** (TAD) qui supporte deux méthodes principales:
  - **push(*o*)**: Insère l'objet *o* sur le dessus de la pile.
  - **pop()**: Retire l'objet du dessus de la pile et retourne-le; si la pile est vide, alors une erreur survient.
- Les méthodes secondaires suivantes devraient aussi être définies:
  - **size()**: Retourne le nombre d'objets dans la pile.
  - **isEmpty()**: Retourne un booléen indiquant si la pile est vide.
  - **top()**: Retourne l'objet du dessus de la pile, sans le retirer; si la pile est vide, alors une erreur survient.

# Exemple

- L'**étendue** (*span*) du prix d'une action à un certain jour,  $d$ , est le nombre maximum de jours consécutifs (jusqu'à aujourd'hui) où le prix de l'action a été plus bas ou égal à son prix au jour  $d$ .



# Un algorithme inefficace

- Il y a une façon directe de calculer l'étendue d'une action à un jour donné pour  $n$  jours:

**Algorithm** computeSpans1( $P$ ):

*Entrée*: Un vecteur de nombres  $P$  à  $n$  éléments.

*Sortie*: Un vecteur de nombres  $A$  à  $n$  éléments tel que  $S[i]$  est l'étendue de l'action au jour  $i$

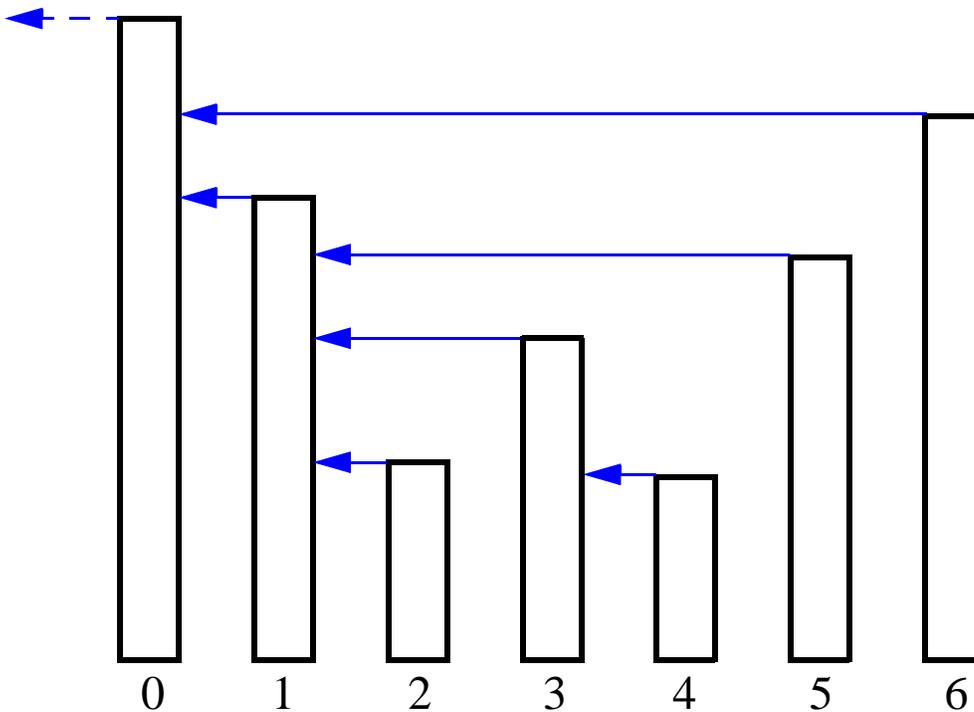
Soit  $S$  un vecteur de  $n$  nombres

```
for  $i=0$  to  $n-1$  do  
     $k \leftarrow 0$   
     $done \leftarrow \text{false}$   
    repeat  
        if  $P[i-k] \leq P[i]$  then  
             $k \leftarrow k+1$   
        else  
             $done \leftarrow \text{true}$   
    until  $(k=i)$  or  $done$   
     $S[i] \leftarrow k$   
return array  $S$ 
```

- Le temps d'exécution de cet algorithme est (ouf!)  $O(n^2)$ . Pourquoi?

# Une pile peut aider!

- Nous voyons que  $s_i$  au jour  $i$  peut être calculé facilement si nous connaissons le jour le plus proche avant  $i$  où le prix est plus haut lors de ce jour que le prix au jours  $i$ . Si un tel jour existe, appelons-le  $h_i$ .
- L'étendue est maintenant définie par  $s_i = i - h_i$



Nous utilisons une *pile* pour calculer  $h_i$

# Étude de cas: Une *applet* pour analyse boursière (suite)

- Le pseudo-code pour notre nouvel algorithme:

**Algorithm** computeSpan2( $P$ ):

*Entrée*: Un vecteur de nombres  $P$  à  $n$  éléments.

*Sortie*: Un vecteur de nombres  $A$  à  $n$  éléments tel que  $S[i]$  est l'étendue de l'action au jour  $i$

Soit  $S$  un vecteur de  $n$  nombres et  $D$  une pile vide

**for**  $i=0$  **to**  $n-1$  **do**

$done \leftarrow false$

**while not**( $D.isEmpty()$  **or**  $done$ ) **do**

**if**  $P[i] \geq P[D.top()]$  **then**

$D.pop()$

**else**

$done \leftarrow true$

**if**  $D.isEmpty()$  **then**

$h \leftarrow -1$

**else**

$h \leftarrow D.top()$

$S[i] \leftarrow i-h$

$D.push(i)$

**return** array  $S$

- Analysons le temps d'exécution de `computeSpan2...`

# À propos de Java

- Étant donné le TAD pile, nous devons coder cet ADT afin de l'utiliser dans nos programmes.
- Vous devez comprendre deux concepts de programmation: les **interfaces** et les **exceptions**.
- Une **interface** est une façon de déclarer ce qu'une classe peut faire. Elle n'indique pas comment le faire.
- Pour une **interface**, vous écrivez simplement les **noms de méthodes** et leurs **paramètres**. Ce qui est important dans un paramètre est son **type**.
- Plus tard, quand vous écrirez une **classe** pour cette interface, vous coderez alors le contenu de ces méthodes.
- Séparer l'**interface** de la **réalisation** est une technique de programmation très utile. Exemple d'interface:

```
public interface radio {  
    public void play();  
    public void stop();  
}
```

# Une interface de pile en Java

- Même si la structure de donnée pile est déjà incluse comme classe Java dans le “*package*” `java.util`, il est possible, et parfois même préférable, de définir votre propre pile spécifique, comme ceci:

```
public interface Stack {  
  
    // accessor methods  
  
    public int size(); // return the number of  
                      // elements in the stack  
  
    public boolean isEmpty(); // see if the stack  
                             // is empty  
  
    public Object top() // return the top element  
                       // throws StackEmptyException; // if called on  
                                                         // an empty stack  
  
    // update methods  
  
    public void push (Object element); // push an  
                                       // element onto the stack. Note that  
                                       // the type of the parameter is  
                                       // specified as an Object  
  
    public Object pop() // return and remove the  
                       // top element of the stack  
                       // throws StackEmptyException; // if called on  
                                                         // an empty stack  
  
}
```

# Exceptions

- Les **exceptions** sont un autre concept de programmation très utile, surtout dans un contexte de gestion d'erreurs.
- Quand vous détectez une erreur (ou un cas *exceptionnel*), vous lancez (*throw*) une exception.

- Exemple

```
public void mangePizza() throws MalAuVentreException
{
    ...

    if (tropMangé)
        throw new MalAuVentreException("Ouch");

    ...
}
```

- Aussitôt l'exception lancée, le flux de contrôle sort de la méthode en cours d'exécution.
- Alors quand **MalAuVentreException** est lancée, nous sortons de la méthode **mangePizza()** pour aller là où cette méthode a été appelée.

# Encore des exceptions

- Supposons que le fragment de code suivant ait appelé la méthode `mangePizza()` en premier lieu.

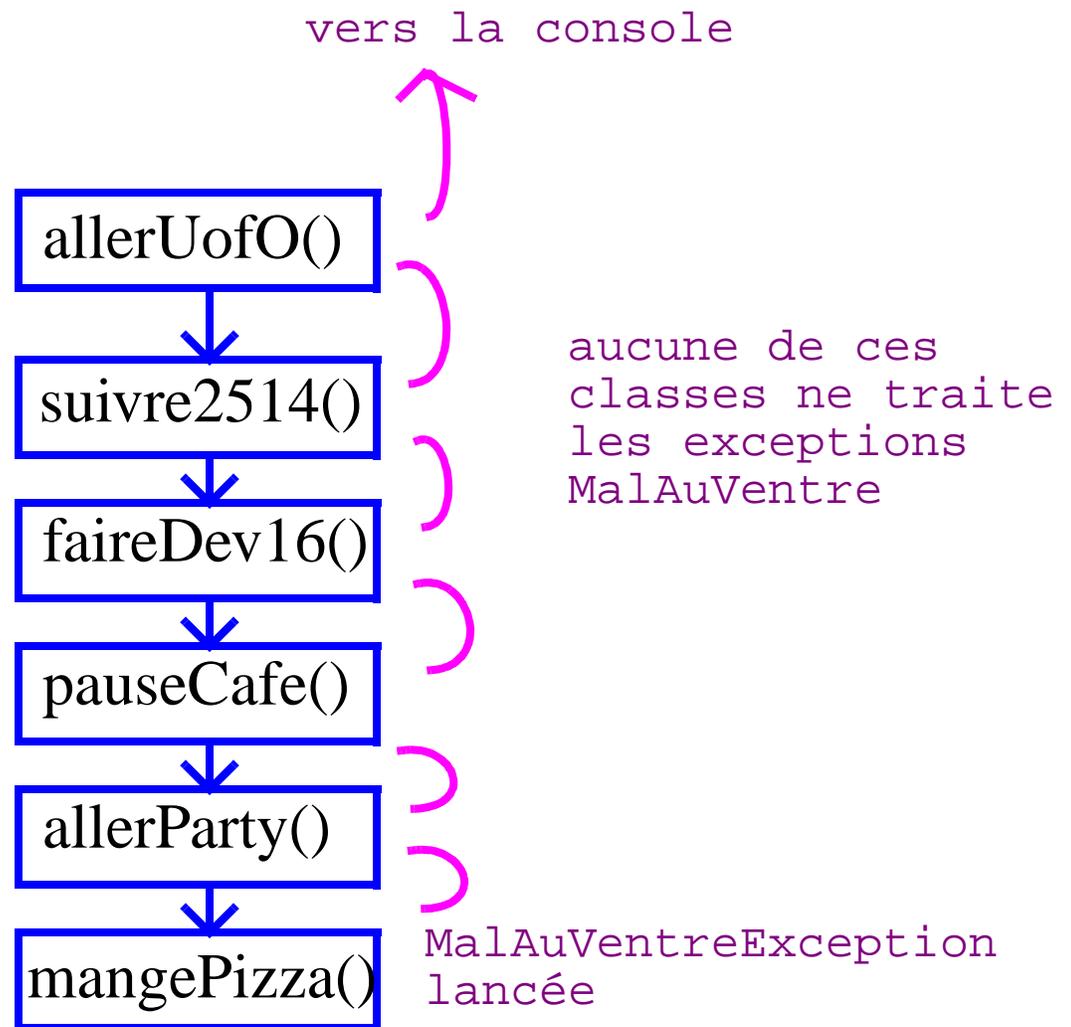
```
private void simuleRencontre()
{
    ...
    try
    {
        unStupideAE.mangePizza();
    }
    catch(MalAuVentreException e)
    {
        System.out.println("quelqu'un a mal au ventre");
    }
    ...
}
```

# Toujours des exceptions

- Nous retournerons à `unStupideAE.mangePizza()`; parce que, souvenez-vous, `mangePizza()` lança l'exception.
- Le bloc `try` et le bloc `catch` indiquent que nous sommes à l'écoute des exceptions qui sont spécifiées dans le paramètre de `catch`.
- Parce que `catch` est à l'écoute de `MalAuVentreException`, le contrôle ira au bloc `catch`, et `System.out.println` sera alors exécuté.
- Notez que le bloc `catch` peut contenir n'importe quoi, pas seulement un `System.out.println`. Vous pouvez gérer les erreurs détectées comme bon vous semble, et vous pouvez même les relancer.
- Notez aussi que si vous lancez une exception dans votre méthode, vous devez ajouter une clause `throws` à la suite du nom de votre méthode.
- Pourquoi utiliser les exceptions? Vous pouvez déléguer vers le haut la responsabilité de traiter les erreurs, c'est-à-dire que le code qui a appelé la méthode en cours aura à gérer le problème.

# Toujours des exceptions

- Si vous ne traitez pas une exception (avec `catch`), elle sera propagée vers le haut le long de la chaîne d'appels de méthodes jusqu'à ce que l'utilisateur l'observe.



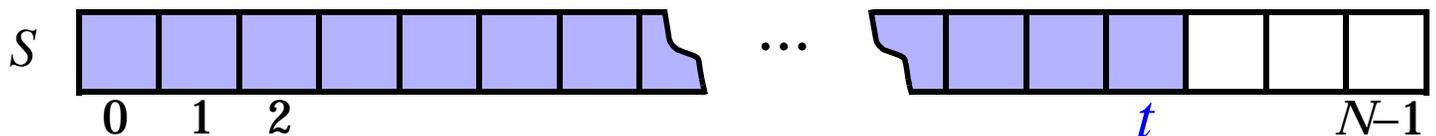
# Exceptions finales

- Ainsi, nous savons comment lancer et traiter des exceptions. Mais que sont-elles exactement en Java? Des classes!
- Observez `MalAuVentreException`.

```
public class MalAuVentreException extends
    RuntimeException {
    public MalAuVentreException(String err)
    {
        super(err);
    }
}
```

# Pile à base de vecteur

- Créez une pile en utilisant un vecteur et en spécifiant une taille maximale  $N$ , par ex.  $N = 1\ 024$ .
- La pile est composée d'un vecteur de  $N$  éléments  $S$  et d'une variable entière  $t$ , l'index de l'élément au-dessus de la pile  $S$ .



- Les indices acceptables pour ce vecteur commencent à  $0$ , alors nous initialisons  $t$  à  $-1$ .
- Pseudo-code

```
Algorithm size():  
    return  $t + 1$ 
```

```
Algorithm isEmpty():  
    return ( $t < 0$ )
```

```
Algorithm top():  
    if isEmpty() then  
        throw a StackEmptyException  
    return  $S[t]$ 
```

...

# Pile à base de vecteur (suite)

- Pseudo-Code (suite)

**Algorithm** push( $o$ ):

**if** size() =  $N$  **then**

**throw** a StackFullException

$t \leftarrow t + 1$

$S[t] \leftarrow o$

**Algorithm** pop():

**if** isEmpty() **then**

**throw** a StackEmptyException

$e \leftarrow S[t]$

$S[t] \leftarrow \text{null}$

$t \leftarrow t - 1$

**return**  $e$

- Chacune des méthodes ci-haut a un temps d'exécution constant ( $O(1)$ )
- La réalisation avec vecteur est simple et efficace.
- Il y a une limite supérieure,  $N$ , pour la taille de la pile. Une valeur arbitraire  $N$  pourrait être trop petite pour une application, ou gaspiller de la mémoire.

# Pile à base de vecteur: Une réalisation en Java

```
public class ArrayStack implements Stack {  
    // Implementation of the Stack interface  
    // using an array.  
  
    public static final int CAPACITY = 1000; // default  
        // capacity of the stack  
    private int capacity; // maximum capacity of the  
        // stack.  
    private Object S[ ]; // S holds the elements of  
        // the stack  
    private int top = -1; // the top element of the  
        // stack.  
  
    public ArrayStack() { // Initialize the stack  
        this(CAPACITY); // with default capacity  
    }  
  
    public ArrayStack(int cap) { // Initialize the  
        // stack with given capacity  
        capacity = cap;  
        S = new Object[capacity];  
    }  
}
```

# Pile à base de vecteur — Réalisation en Java (suite)

```
public int size( ) { //Return the current stack
                    // size
    return (top + 1);
}

public boolean isEmpty( ) { // Return true iff
                            // the stack is empty
    return (top < 0);
}

public void push(Object obj) { // Push a new
                               // object on the stack
    if (size() == capacity) {
        throw new StackFullException("Stack overflow.");
    }
    S[++top] = obj;
}

public Object top( ) // Return the top stack
                    // element
    throws StackEmptyException {
    if (isEmpty( )) {
        throw new StackEmptyException("Stack is
        empty.");
    }
    return S[top];
}
```

# Pile à base de vecteur — Réalisation en Java (suite)

```
public Object pop() // Pop off the stack element
    throws StackEmptyException {
    Object elem;
    if (isEmpty( )) {
        throw new StackEmptyException("Stack is Empty.");
    }
    elem = S[top];
    S[top--] = null; // Dereference S[top] and
                    // decrement top
    return elem;
}
}
```

# Pile extensible à base de vecteur

- Au lieu d'abandonner avec `StackFullException`, nous pouvons remplacer le vecteur  $S$  par un plus grand vecteur et continuer à traiter les opérations *push*.

**Algorithm** `push(o)`:

**if** `size() = N` **then**

$A \leftarrow$  *new array of length  $f(N)$*

**for**  $i \leftarrow 0$  **to**  $N - 1$

$A[i] \leftarrow S[i]$

$S \leftarrow A$

$t \leftarrow t + 1$

$S[t] \leftarrow o$

- ***De quelle taille devrait être le nouveau vecteur?***
  - *stratégie ajustée* (ajouter  $c$ ):  $f(N) = N + c$
  - *stratégie de croissance* (doubler):  $f(N) = 2N$
- Afin de comparer ces deux stratégies, nous utiliserons le modèle de coût suivant:

opération <i>push</i> régulière: ajouter un élément	1
opération <i>push</i> spéciale: créer un vecteur de taille $f(N)$ , copier $N$ éléments, et ajouter un élément	$f(N) + N + 1$

# Stratégie ajustée ( $c=4$ )

- Débuter avec un vecteur de taille 0
- Le coût d'une opération *push* spéciale est  $2N + 5$

push	phase	$n$	$N$	coût
1	1	0	0	5
2	1	1	4	1
3	1	2	4	1
4	1	3	4	1
5	2	4	4	13
6	2	5	8	1
7	2	6	8	1
8	2	7	8	1
9	3	8	8	21
10	3	9	12	1
11	3	10	12	1
12	3	11	12	1
13	4	12	12	29

# Performance de la stratégie ajustée

- Nous considérons  $k$  phases, où  $k = n/c$
- Chaque phase correspond à une nouvelle taille de vecteur
- Le coût d'une phase  $i$  est de  $2ci$
- le coût total de  $n$  opérations *push* est le coût total de  $k$  phases, avec  $k = n/c$ :

$$2c (1 + 2 + 3 + \dots + k),$$

qui est  $O(k^2)$  et  $O(n^2)$ .

# Stratégie de croissance

- Débuter avec un vecteur de taille 0, ensuite 1, 2, 4, ...
- Le coût d'un *push* spécial est de  $3N + 1$ , où  $N > 0$

push	phase	$n$	$N$	coût
1	0	0	0	2
2	1	1	1	4
3	2	2	2	7
4	2	3	4	1
5	3	4	4	13
6	3	5	8	1
7	3	6	8	1
8	3	7	8	1
9	4	8	8	25
10	4	9	16	1
11	4	10	16	1
12	4	11	16	1
...	...	...	...	...
16	4	15	16	1
17	5	16	16	49

# Performance de la stratégie de croissance

- Nous considérons  $k$  phases, où  $k = \log n$
- Chaque phase correspond à une nouvelle taille de vecteur
- Le coût d'une phase  $i$  est de  $2^{i+1}$
- le coût total de  $n$  opérations *push* est le coût total de  $k$  phases, avec  $k = \log n$

$$2 + 4 + 8 + \dots + 2^{\log n + 1} =$$

$$2n + n + n/2 + n/4 + \dots + 8 + 4 + 2 = 4n - 1$$

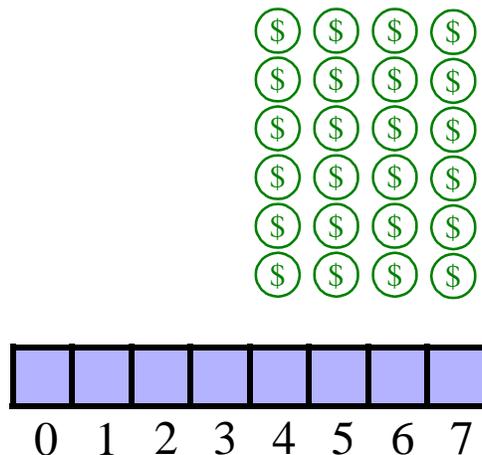
- La stratégie de croissance gagne!

# Analyse amortie

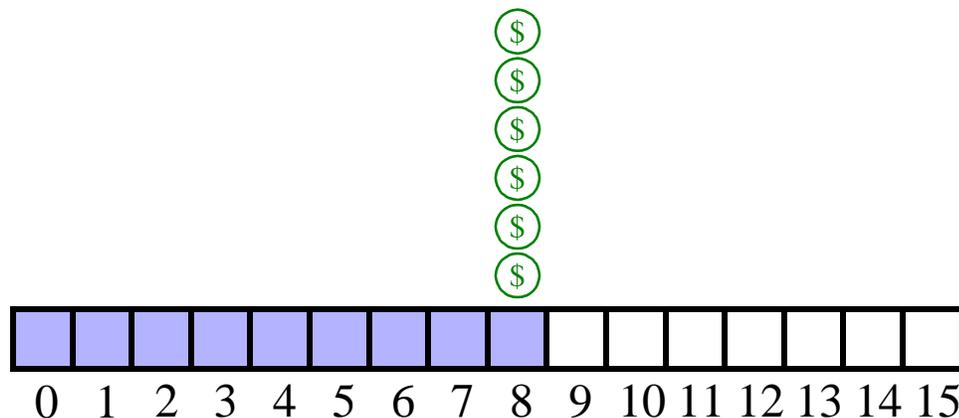
- Le **temps d'exécution amorti** d'une opération parmi une série d'opérations est le temps d'exécution du pire des cas de la série d'opérations toute entière divisé par le nombre d'opérations.
- La **méthode de comptabilité** détermine le temps d'exécution amorti à l'aide d'un système de crédits et de débits.
- Nous considérons l'ordinateur comme un appareil à sous qui exige un cyber-dollar pour une quantité constante de temps de calcul.
- Nous fixons un procédé pour facturer les opérations. Il s'agit là d'un ***procédé d'amortissement***.
- Nous pouvons surfacturer certaines opérations et en sousfacturer d'autres. Par exemple, nous pouvons ***facturer un même montant pour chaque opération***.
- Le procédé doit toujours nous procurer suffisamment d'argent pour payer le coût réel de l'opération.
- Le coût total de la série d'opérations n'est pas plus élevé que le montant total facturé.
- $(\text{temps amorti}) \leq (\text{total \$ facturé}) / (\# \text{ opérations})$

# Procédé d'amortissement pour la stratégie de croissance

- À la fin d'une phase, nous devons avoir assez économisé pour payer le *push* spécial de la phase suivante.
- À la fin de la phase 3, il faut avoir économisé \$24.



- Les économies payent pour la croissance du vecteur.



- Nous facturons **\$7** pour un *push*. Les **\$6** économisés par *push* régulier sont “conservés” dans la seconde moitié du vecteur.

# Analyse d'amortissement pour la stratégie de croissance

- Nous facturons **\$5** (offre spéciale de lancement) pour le premier *push* et **\$7** pour les suivants.

push	$n$	$N$	<i>solde</i>	<i>facture</i>	coût
1	0	0	\$0	\$5	\$2
2	1	1	\$3	\$7	\$4
3	2	2	\$6	\$7	\$7
4	3	4	\$6	\$7	\$1
5	4	4	\$12	\$7	\$13
6	5	8	\$6	\$7	\$1
7	6	8	\$12	\$7	\$1
8	7	8	\$18	\$7	\$1
9	8	8	\$24	\$7	\$25
10	9	16	\$6	\$7	\$1
11	10	16	\$12	\$7	\$1
12	11	16	\$18	\$7	\$1
...	...	...	...	...	...
16	15	16	\$42	\$7	\$1
17	16	16	\$48	\$7	\$49

# “Casting” avec une pile générique

- Avoir un `ArrayStack` qui peut contenir seulement des objets `Entier` ou des objets `Étudiant`.
- Afin de réaliser ceci à l’aide d’une pile générique, les objets retournés doivent être “moulés” (*cast*) dans le bon type de donnée.
- Un exemple en Java:

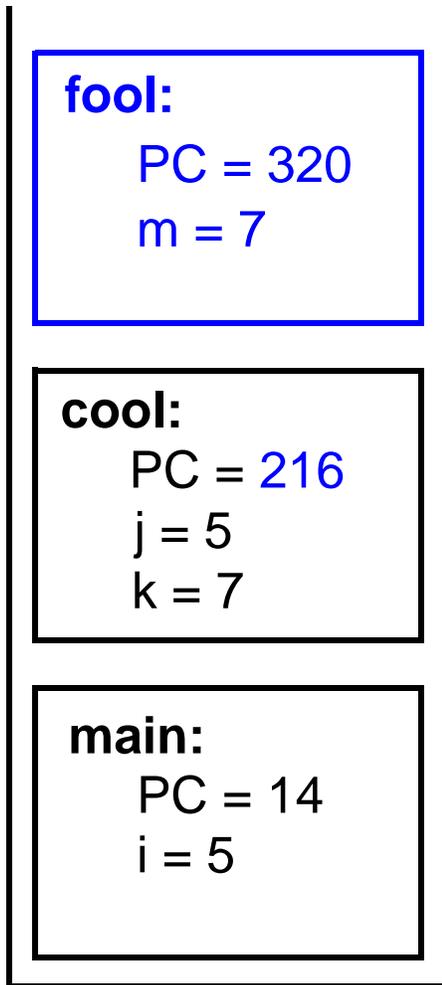
```
public static Integer[] reverse(Integer[] a) {
    ArrayStack S = new ArrayStack(a.length);
    Integer[] b = new Integer[a.length];
    for (int i = 0; i < a.length; i++)
        S.push(a[i]);
    for (int i = 0; i < a.length; i++)
        b[i] = (Integer)(S.pop()); // the popping
        // operation gave us an Object, and we
        // casted it to an Integer before
        // assigning it to b[i].
    return b;
}
```

# Piles dans la Machine Virtuelle Java (JVM)

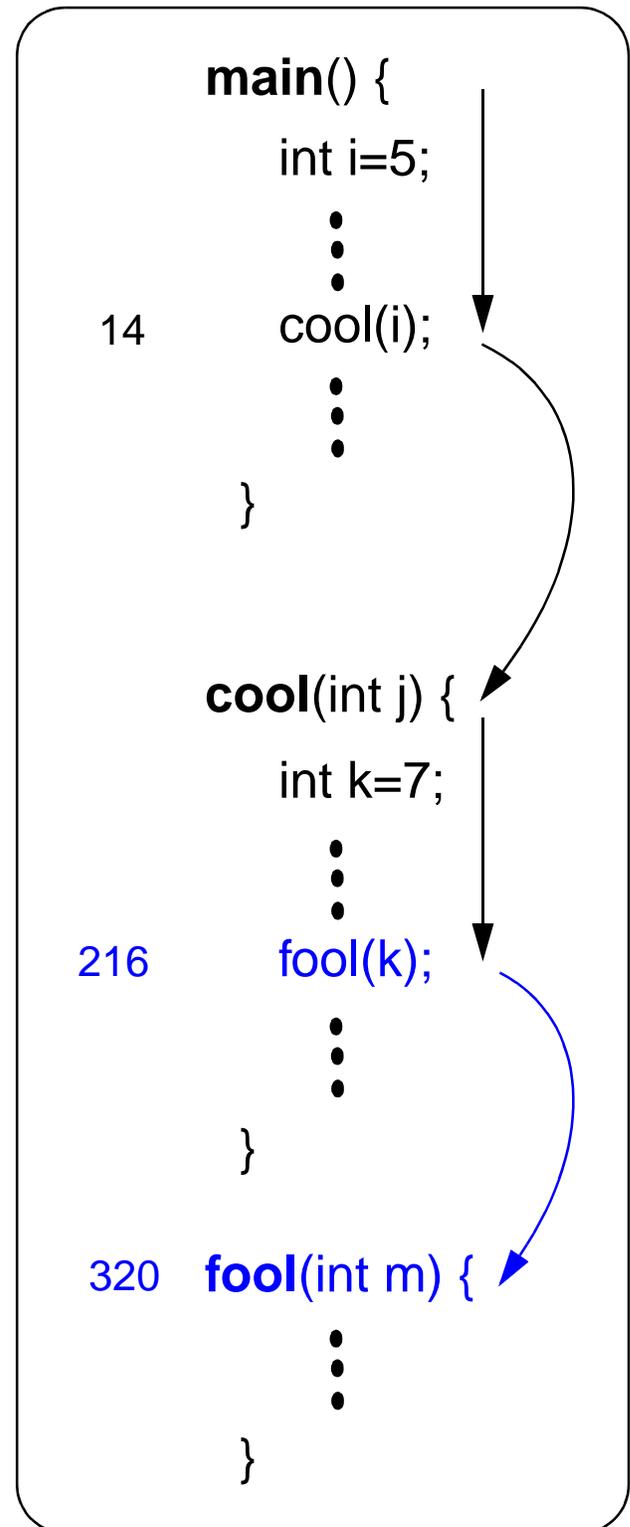
- Chaque processus en exécution dans un programme Java a sa propre pile de méthodes (Method Stack).
- Chaque fois qu'une méthode est appelée, elle est empilée sur une telle pile.
- L'utilisation d'une pile pour cette opération permet à Java de faire plusieurs choses utiles:
  - Exécuter des appels récursifs de méthode
  - Afficher la trace d'une pile pour localiser une erreur.
- Java inclut aussi une pile d'opérandes qui est utilisée pour évaluer les instructions arithmétiques:

```
Integer add(a, b):  
  OperandStack Op  
  Op.push(a)  
  Op.push(b)  
  temp1 ← Op.pop()  
  temp2 ← Op.pop()  
  Op.push(temp1 + temp2)  
  return Op.pop()
```

# Pile de méthodes Java



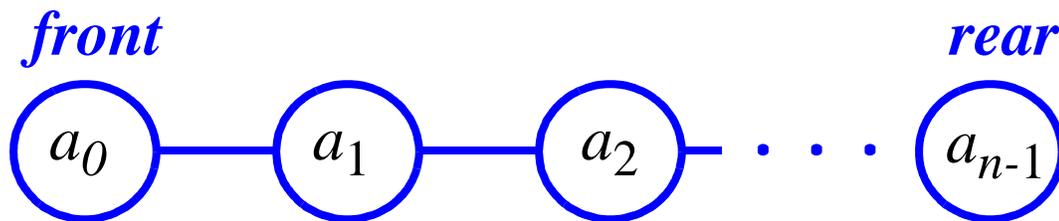
**Pile Java**



**Programme Java**

# Files (*Queues*)

- Une file se distingue d'une pile par ses routines d'insertion et de retrait qui suivent le principe **premier entré, premier sorti** (*first-in-first-out*, ou *FIFO*).
- Des éléments peuvent être insérés à tout moment, mais seulement l'élément qui a été le plus longtemps dans la file peut être retiré.
- Les éléments sont **enfilés** (*enqueued*) par l'arrière (*rear*) et **défilé** (*dequeued*) par l'avant (*front*)

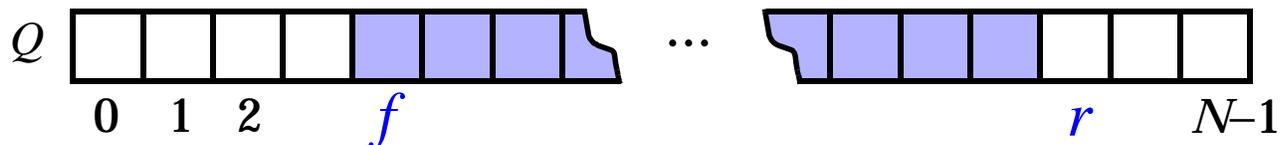


# Le TAD File (ou Queue)

- La file supporte deux méthodes fondamentales:
  - `enqueue(o)`: Insère l'objet  $o$  à l'arrière de la file
  - `dequeue()`: Retire l'objet du devant de la file et retourne-le; une erreur survient lorsque la file est vide
- Les méthodes secondaires suivantes devraient aussi être définies:
  - `size()`: Retourne le nombre d'objets dans la file
  - `isEmpty()`: Retourne un booléen indiquant si la pile est vide
  - `front()`: Retourne, sans le retirer, l'objet au devant de la file; si la pile est vide, alors une erreur survient

# File à base de vecteur

- Créez une file en utilisant un vecteur circulaire.
- Spécifiez une taille maximale  $N$ , par ex.  $N = 1\ 000$ .
- La file est composée d'un vecteur de  $N$  éléments  $Q$  et de deux variables entières:
  - $f$ , l'index de l'élément du devant
  - $r$ , l'index de l'élément suivant celui de l'arrière
- Configuration "normale"



- Configuration circulaire ("*wrapped around*")



- Que veut dire  $f=r$ ?

# File à base de vecteur (suite)

- Pseudo-code

**Algorithm** size():

**return**  $(N - f + r) \bmod N$

**Algorithm** isEmpty():

**return**  $(f = r)$

**Algorithm** front():

**if** isEmpty() **then**

        throw a QueueEmptyException

**return**  $Q[f]$

**Algorithm** dequeue():

**if** isEmpty() **then**

        throw a QueueEmptyException

$temp \leftarrow Q[f]$

$Q[f] \leftarrow \text{null}$

$f \leftarrow (f + 1) \bmod N$

**return**  $temp$

**Algorithm** enqueue( $o$ ):

**if** size =  $N - 1$  **then**

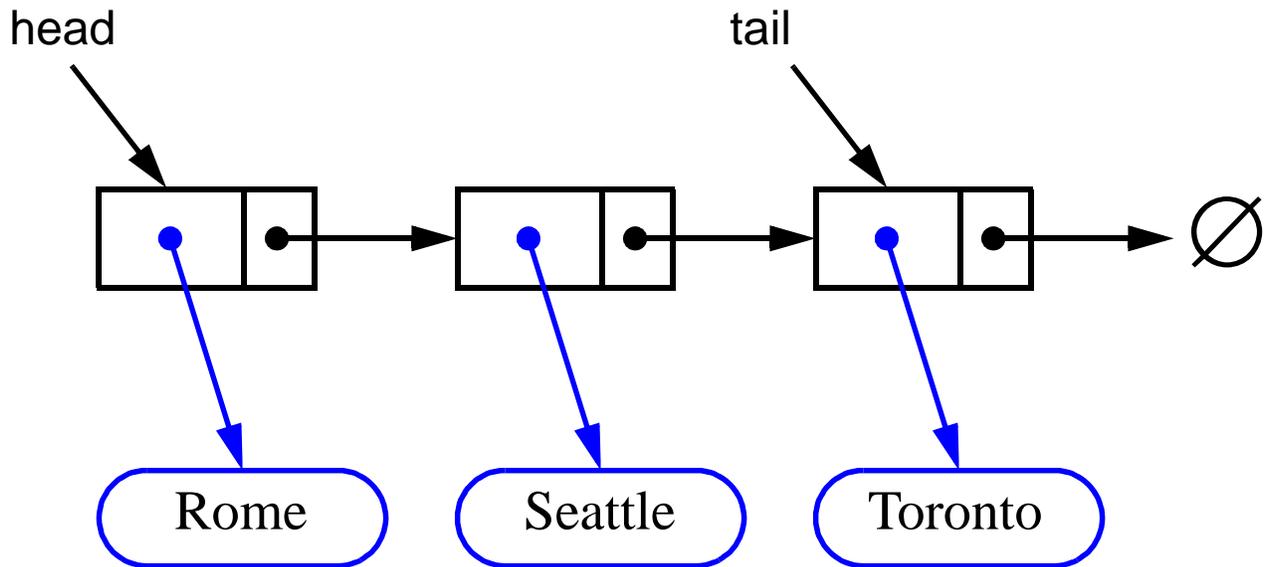
        throw a QueueFullException

$Q[r] \leftarrow o$

$r \leftarrow (r + 1) \bmod N$

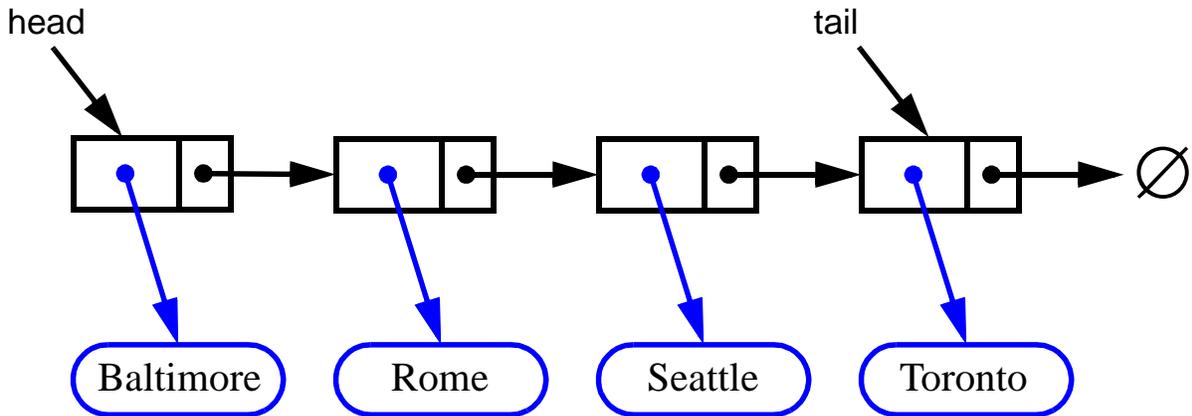
# Réalisation d'une file à l'aide d'une liste simplement chaînée

- nœuds connectés en chaîne par des liens (*links*)

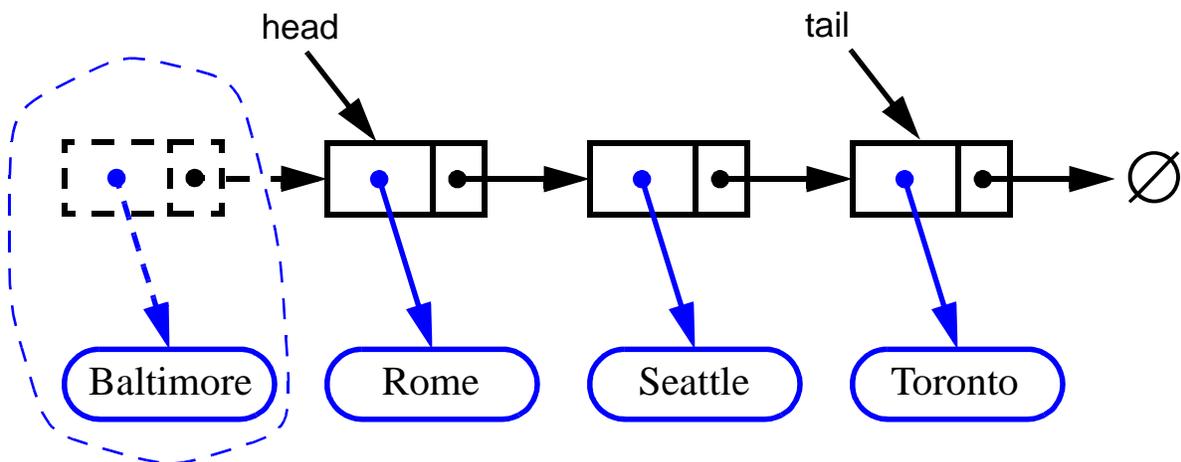


- la tête (*head*) de la liste est le devant de la file, la queue de la liste (*tail*) est le derrière de la file.
- pourquoi pas le contraire?

# Retirer l'élément de tête



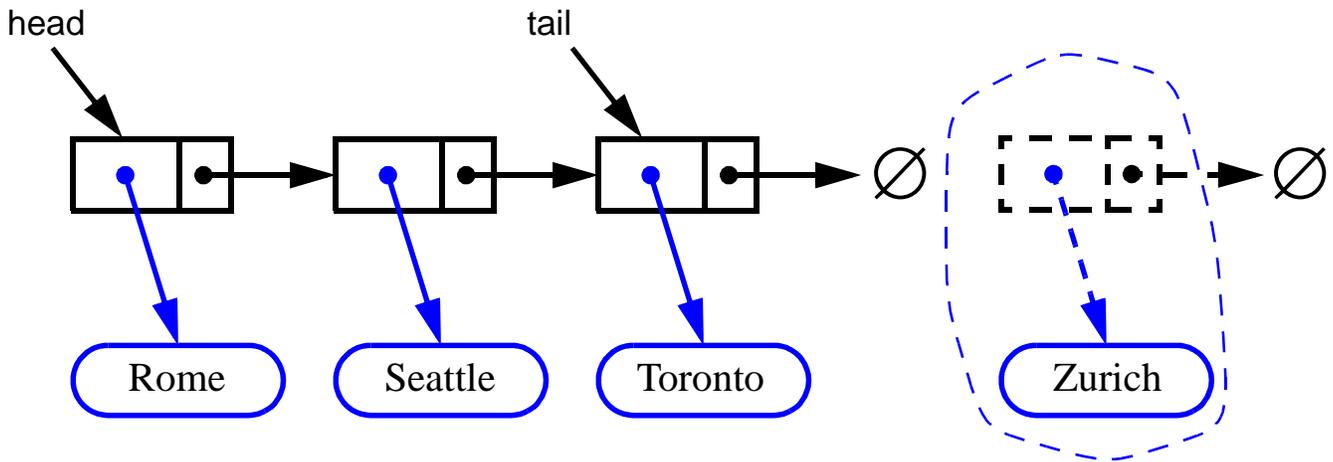
- avancez la référence de la tête



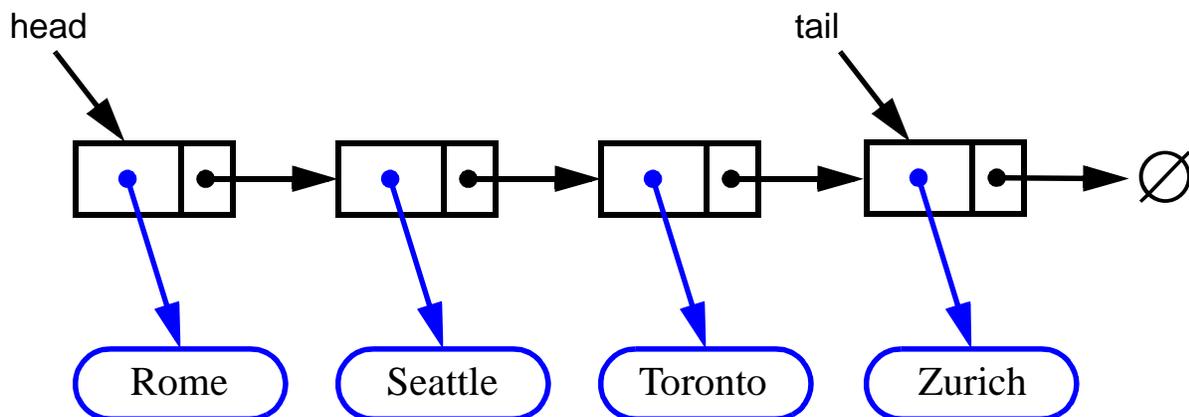
- insérer un élément à la tête est tout aussi facile.

# Insérer un élément à la queue

- créez un nouveau nœud



- enchaînez-le et déplacez la référence à la queue



- comment retirer l'élément de queue?

# Files à deux bouts (Double-Ended Queues)

- une **file à deux bouts**, ou **deque**, supporte l'insertion et le retrait à l'avant comme à l'arrière.
- Le TAD Deque:
  - **insertFirst(*e*)**: Insère *e* au début de la deque
  - **insertLast(*e*)**: Insère *e* à la fin de la deque
  - **removeFirst()**: retire et retourne le premier élément
  - **removeLast()**: retire et retourne le dernier élément
- Les méthodes secondaires incluent:
  - **first()**
  - **last()**
  - **size()**
  - **isEmpty()**

# Réalisations de piles et de files à l'aide de Deques

- Piles avec Deques:

<b>Méthode de Pile</b>	<b>Réalisation avec Deque</b>
size()	size()
isEmpty()	isEmpty()
top()	last()
push(e)	insertLast(e)
pop()	removeLast()

- Files avec Deques:

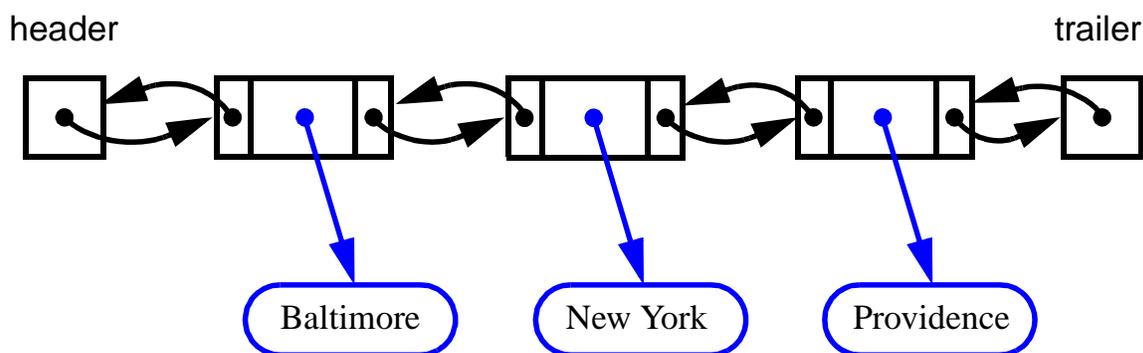
<b>Méthode de File</b>	<b>Réalisation avec Deque</b>
size()	size()
isEmpty()	isEmpty()
front()	first()
enqueue()	insertLast(e)
dequeue()	removeFirst()

# Le patron de conception Adaptateur (*Adaptor Pattern*)

- L'utilisation d'une deque pour réaliser une pile ou une file est un exemple du **patron de conception adaptateur** (*adaptor pattern*). Ce patron réalise une classe en utilisant des méthodes d'une autre classe.
- Souvent, les classes *adaptateur* spécialisent des classes générales.
- Voici deux applications:
  - Spécialisation d'une classe générale en changeant quelques méthodes:  
Ex: réalisation d'une pile avec une deque.
  - Spécialisation de types d'objets utilisés par une classe générale:  
Ex: définir une classe **IntegerArrayStack** qui adapte **ArrayStack** pour ne contenir que des entiers.

# Réalisation de deque à l'aide de listes doublement chaînées

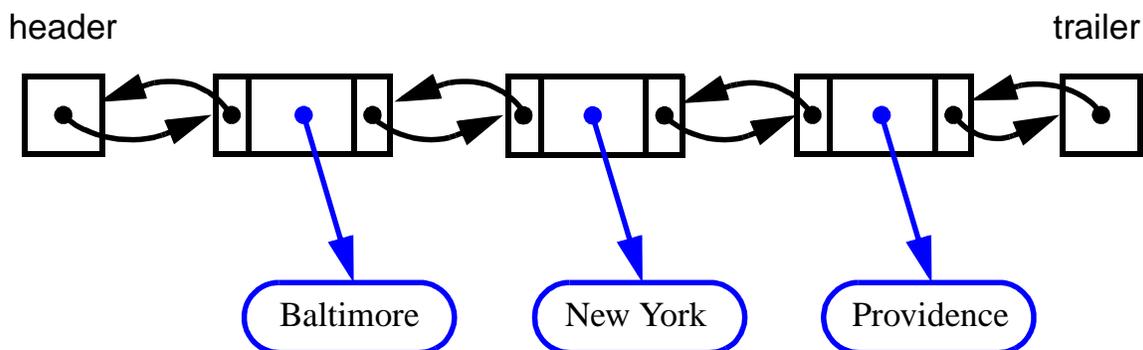
- Effacer l'élément de queue d'une liste simplement chaînée ne peut pas être fait en un temps constant.
- Pour réaliser une deque, nous utilisons une **liste doublement chaînée** avec des nœuds spéciaux pour l'avant (*header*) et l'arrière (*trailer*).



- Un nœud de liste doublement chaînée a un lien **suisant** (*next*) **et** un lien **précédent** (*prev*). Ce nœud supporte les méthodes suivantes:
  - `setElement(Object e)`
  - `setNext(Object newNext)`,
  - `setPrev(Object newPrev)`
  - `getElement()`, `getNext()`, `getPrev()`
- En utilisant une liste doublement chaînée, toutes les méthodes de deque ont un temps d'exécution constant (c'est-à-dire,  $O(1)$ )!

# Réalisation de deque à l'aide de listes doublement chaînées (suite)

- En réalisant une liste doublement chaînée, nous ajoutons deux nœuds spéciaux aux extrémités: les nœuds *header* et *trailer*.
  - Le nœud *header* est placé avant le premier élément de la liste. Il a un prochain lien valide, mais un lien précédent vide.
  - Le nœud *trailer* est placé après le dernier élément de la liste. Il a un lien précédent valide, mais un prochain lien vide.
- les nœuds *header* et *trailer* sont des sentinelles ou nœuds “bidon” parce qu’ils ne contiennent pas d’éléments.
- Diagramme de notre liste doublement chaînée:



# Réalisation de deque à l'aide de listes doublement chaînées (suite)

- Visualisons le code de `removeLast()`.

